

分别在运动和静止镜面上反射的电磁波包干涉现象的基础理论分析

杨林平¹⁾ 苏肇冰^{2)†} 励名强²⁾

1) (中国科学院物理研究所, 北京 100190)

2) (中国科学院理论物理研究所, 北京 100190)

(2011年11月15日收到; 2012年3月16日收到修改稿)

本文讨论了分别在运动和静止镜面上反射的相干电磁波包的干涉现象, 运动镜面反射所导致的多普勒效应会出现在这种干涉现象之中。本文按照经典电动力学边值问题, 特别是运动界面边值问题的观念和方法, 为这种干涉现象提供了一个理论描述, 分析和讨论了这种干涉现象的特点, 并给出了一个确定运动镜面速度的解析表达式。文章最后指出, 还有许多与本文内容紧密相联的重要而有趣的问题有待进一步研究和讨论。

关键词: 含有多普勒效应的波包干涉, 电磁学和无线电物理

PACS: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 42.25.Gy, 42.25.Hz

1 引言

相干性是物理学中一个重要而且基本的概念。它不仅具有广泛的应用而且对于人类社会的物质文明建设有着众多的贡献。波动的相干性常可通过一个双缝衍射实验来演示和说明, 从点光源发出的光, 通过间距与波长相当的两条缝隙形成两束相干光。在这两束相干光相重叠的区域中, 探测器可以测到接收强度随空间位置的变化, 这种强度的变化可以用两束光抵达探测器接收点的光程差的变化来解释。波的干涉也可以通过一个 Michelson 干涉仪来实现和演示, 入射光束被分解为两个相干光束, 这两个相干光束被引导到处于不同空间位置的反射镜上反射回来。它们在经历不同的路径甚至不同的材料后又被汇聚在一起, 由探测器所接收, 并被读出它们的相干强度。我们的问题是, 当一个假想的 Michelson 干涉仪中, 其中的一个反射镜作匀速运动, 而另外一个反射镜仍然保持静止, 这时候探测器所接收到的干涉信号有什么新的特点。

在大量的光学和电磁波的干涉现象中, 光源所发出的波束常不再是简单的单色平面波, 而是由固定频率的波动所携带的脉冲波, 我们将讨论的是分别在运动和静止镜面上反射的两个相干脉冲

波包的干涉现象, 运动镜面反射所导致的多普勒效应会出现在这种波包的干涉现象之中。这种受到镜面运动影响的波包干涉现象具有丰富的物理内涵, 同时也有着广泛和重要的应用。但是在应用科学和工程科学中, 对这一现象的讨论, 常常是在单色平面波观念 (连续波近似) 的基础上做一些半经验的分析^[1]。不久以前, 文献 [2] 从频率域出发, 提出了对这一现象的一个较为系统的理论分析。而本文则是按照经典电动力学边值问题, 特别是运动边界边值问题的理论框架, 为这种干涉现象提供了一个理论描述, 分析和讨论了这种干涉现象的特点, 以及测量这种干涉现象的方案, 也包含了由测量结果反推镜面运动速度的方法和原理。在我们的描述中, 多普勒效应是通过运动界面的边条件而被引入到这类干涉现象之中, 以此为基础所形成的理论描述为这类具有多普勒效应的波包干涉现象的研究提供了一个坚实的理论基础。在波包序列入射的条件下, 我们又导出了多普勒频拍的表达式, 它为从观察点的实验测量反推运动镜面速度的理论依据提供了直观的说明。我们的讨论, 既适用于光学中波包的多普勒干涉现象, 也适用于微波中相类似的干涉现象。

在第 2 节, 我们讨论了这种分别从运动镜面和

† E-mail: zbs@itp.ac.cn

静止镜面反射光束的干涉效应的一个理想实验装置,并给出了一个描述这种干涉效应的一维模型.在第3节中,我们运用经典电动力学运动界面边值问题的思路求解了在两种镜面上反射的电磁波包,也对它们的物理性质做了初步的讨论.在第4节中,我们分析和讨论了这种干涉现象的测量及其测量记录的特点.我们在4.1节中,先考虑入射波包的一个频率分量,即固定频率的单色入射波的例子,讨论其在两种镜面上反射后所形成的干涉.然后,在4.2中,对波包入射情形进行分析讨论.4.3节是一个简单的应用,讨论了运动镜面速度的测量和波包序列积分强度的共轭函数.第5节是数值计算举例和讨论.第6节是结束语.附录A是关于运动界面边界条件的说明,附录B是第5节相关讨论的一个补充.

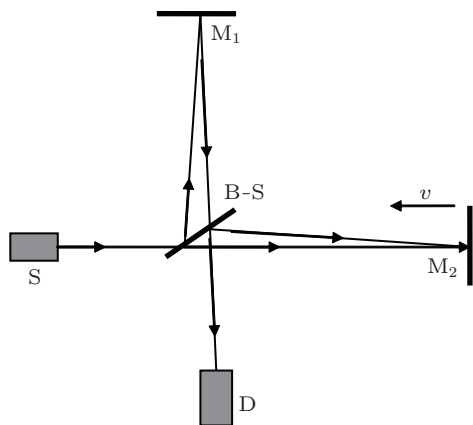


图1 光路示意图(一个相干波包由S出发,经过分裂器B-S(半镀银的镜面)分裂成两束独立传播互为相干的波包.其中之一在静止反射镜 M_1 上反射原路折回,再通过B-S到达探测器D.另一束在以速度 v 做连续运动的镜面 M_2 上反射,反射波包经B-S再反射后也到达探测器D.这两束分别在 M_1, M_2 上反射的波包在探测器处相干叠加形成干涉并被测量)

2 系统的描述: 一个一维模型

从光源发出的一个被固定频率 ω_0 所荷载的相干波包,被分裂器分解为两路相干的互相独立传播的波包,其中之一被一个静止的镜面所反射,另一个被一个运动的镜面所反射.这两路反射波又汇聚在一起,被一个探测器所接收和测量(见图1).我们所关心的波包在时空中的传播,只是与时间和离开分裂器的空间距离有关,所以这样一个传播和干涉的过程可以由一个一维模型来描述.也就是说,两个相干脉冲在 x_0 点和 $t_0 + \tau$ 时刻产生,其中之一在位于 $x = x_0^{(f)}$ 的固定界面反射,另一个在轨迹为

$$x^{(m)}(t) = x_0^{(m)} - v(t - t_0) \quad (1)$$

的运动反射镜上反射,其中 v 是镜面的运动速度, $x_0^{(m)}$ 是在 $t = t_0$ 时镜面的位置.两个反射波包相干叠加后在 $x_0 - L$ 处被探测器所接收.我们提醒,运动镜面的轨迹方程(1)有这样一性质,即在变换

$$\begin{aligned} t_0 &\rightarrow t_0 + \Delta t, \\ x_0^{(m)} &\rightarrow x_0^{(m)} - v\Delta t \end{aligned}$$

下,运动轨迹 $x^{(m)}(t)$ 保持不变.

我们用这两个波包的电场分量,分别记为 $F_m(t, x)$ 和 $F_f(t, x)$,做为它们的振幅,来描述它们的传播和干涉.这两个相干波包在产生后和被探测之前,除被镜面反射外,都是在做自由传播,所以它们一定满足自由传播的麦克斯韦方程

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) F(t, x) = 0, \quad (2)$$

其中 $F(t, x)$ 既可是 $F_m(t, x)$ 也可是 $F_f(t, x)$.不难发现,在上面所描述的一维系统的条件下,这个方程的通解为

$$F(t, x) = F^{(\text{inc})}(t, x) + F^{(\text{out})}(t, x), \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} F^{(\text{inc})}(t, x) &= \int d\omega e^{-i\omega[t - (t_0 + \tau) - \frac{1}{c}(x - x_0)]} \\ &\quad \times G^{(\text{inc})}(\omega) + \text{c.c.}, \\ F^{(\text{out})}(t, x) &= \int d\omega' e^{-i\omega'[t - t'_0 + \frac{1}{c}(x - x'_0)]} \\ &\quad \times G^{(\text{out})}(\omega') + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (4)$$

$G(\omega)$ 是描写波包谱分布的一个频率的任意函数, x_0, t_0, x'_0, t'_0 是为了方便引入的待定常数.而参数 τ 是用来描述波包产生时刻相对于参考时刻 t_0 的延迟或提前.入射波包到达分裂器所在位置 x_0 时间的推迟或提前,将会影响到分裂后的两个独立传播的波包,而这种影响对两个波包是相同的.一个有趣的问题是,当它们分别被运动镜面和静止镜面反射形成干涉后,这种推迟或提前的效应是否会被相互抵消.事实上由于运动镜面的存在,系统不再具有时间平移对称性.当我们选择了波包的入射时刻 t_0 ,也就同时选定了在 $t = t_0$ 时刻运动镜面的位置 $x_0^{(m)}$.不同时刻的入射波包对应着不同的反射镜面位置,所以波包入射时刻的推迟或提前所导致干涉现象的变化必定会含有运动镜面运动轨迹的信息.这是我们要引入延迟参考时间 $t_0 + \tau$ 的物理原因.

(3)式和(4)式既适用于在固定镜面上入射和反射的波包,也适用于在运动镜面上入射和反射

的波包, 我们分别以下标 f 和 m 来标记. 在以上的式子中, $F^{(\text{inc})}(t, x)$ 事实上是一个 $t - \frac{x}{c}$ 的任意函数, 它描写在 $t_0 + \tau$ 时刻分裂器所在的 x_0 点产生的沿 x 轴向反射镜方向传播的一个相干波包, 而 $F^{(\text{out})}(t, x)$ 是 $t + \frac{x}{c}$ 的任意函数, 它描述了从反射镜沿着与 x 轴相反的方向向探测器做传播的相干波包. (4) 式把这两个振幅表示成了它们各个频率分量的相干叠加. 在通常的讨论中, $G(\omega)$ 可以取两种典型的形式, 其一是高斯分布, 即

$$G(\omega) = A e^{-\alpha(\omega - \omega_0)^2}, \quad (5)$$

其中 A 是分布函数的幅度, $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ 是高斯波包以 ω_0 为中心的频谱分布的宽度. 另一种常用的形式是

$$G(\omega) = A \theta(\omega_2 - \omega) \theta(\omega - \omega_1), \quad (6)$$

并且 $\omega_2 > \omega_0 > \omega_1 > 0$. 它是频谱空间上的一个矩形分布, ω_2, ω_1 是频谱分布的上下界, A 也是分布函数的幅度.

显然, 通过分裂器分离出的两个互为相干的入射波函数 $F_f^{(\text{inc})}(t, x)$ 和 $F_m^{(\text{inc})}(t, x)$ 具有相同函数形式, 即 $F_f^{(\text{inc})}(t, x) = F_m^{(\text{inc})}(t, x) = F^{(\text{inc})}(t, x)$, 也就是说 $G_f^{(\text{inc})}(\omega) = G_m^{(\text{inc})}(\omega) = G^{(\text{inc})}(\omega)$. 我们将这样进行求解, 假设入射波 $F^{(\text{inc})}(t, x)$ 的所有参数: x_0, t_0, τ 和 $G^{(\text{inc})}(\omega)$ 是已知的, 分别利用在固定镜面或运动镜面处麦克斯韦方程的不同的边条件, 来求解不同反射波的振幅 $F_f^{(\text{out})}(t, x)$ 和 $F_m^{(\text{out})}(t, x)$, 即求解它们相应的 x'_0, t'_0 和 $G^{(\text{out})}(\omega')$.

我们假设在 $x_0 - L$ 处的探测器是一个平方律器件. 它在一个宏观时间间隔内按累加方式计量所接收到的总的相干振幅 (所有相干振幅之和) 所贡献的能流密度. 我们称这个计量所得的物理量为积分强度, 即

$$\begin{aligned} I_L(n) &= \int dt P(t, x)|_{x=x_0-L} \\ &\propto \int dt \left[F_f^{(\text{out})}(t, x) \right. \\ &\quad \left. + F_m^{(\text{out})}(t, x) \right]_{x=x_0-L}^2, \quad (7) \end{aligned}$$

其中, $P(t, x)$ 是 t 时刻在 x 点反射波的 Poyting 矢量, 下标 L 标记探测器的空间位置. 我们提醒, 由于 $F^{(\text{inc})}(t, x)$ 是向背向探测器传播的相干振幅, 而 $F^{(\text{out})}(t, x)$ 才是朝向探测器传播的相干振幅, 所以只有 $F_f^{(\text{out})}(t, x)$ 和 $F_m^{(\text{out})}(t, x)$ 对探测器的计量有贡献. 此外, $I_L(n)$ 的重量 n 是用来描述波包发射

的迟后效应的标记, 它是发射延迟时间 $\tau \rightarrow \tau_n$ 的下标.

3 边条件和求解相干振幅

现在, 我们将具体通过静止和运动镜面处的边条件来求解出射波 $F_f^{(\text{out})}(t, x)$ 和 $F_m^{(\text{out})}(t, x)$. 由于在运动界面上的边条件 [3] 不常为许多读者所熟知, 我们在附录 A 中对它单独进行了比较具体的讨论. 此外, 如果把界面速度 v 取为零, 我们也就回到了通常的静止界面的边条件.

按照 (4) 式一个入射波包可以表示成它的各个不同频率的振幅的相干叠加. 鉴于附录 A 中边条件 (A1) 式是对确定频率的单色平面波所写下的, 我们选定入射波包的一个频率为 ω , 振幅为 $\Delta\omega G^{(\text{inc})}(\omega)$ 的分量,

$$\begin{aligned} \Delta F^{(\text{inc})}(t, x) &= \Delta\omega e^{-i\omega[t - (t_0 + \tau) - \frac{1}{c}(x - x_0)]} \\ &\quad \times G^{(\text{inc})}(\omega) + \text{c.c.}, \quad (8) \end{aligned}$$

分别讨论它在固定和运动镜面上的反射.

我们先讨论在运动镜面反射的情形. $\Delta F^{(\text{inc})}(t, x)$ 在运动反射镜面上会诱导一个反射波的频率分量,

$$\begin{aligned} \Delta F_m^{(\text{out})}(t, x) &= \Delta\omega' e^{-i\omega'[t - t'_0 + \frac{1}{c}(x - x'_0)]} \\ &\quad \times G_m^{(\text{out})}(\omega') + \text{c.c.}, \quad (9) \end{aligned}$$

在运动镜面的左侧, 无论是电场分量还是磁感应强度都应该是入射波和反射波相应分量之和. 按照平面波的性质, 入射波的磁感应强度与相应的电场分量相等, 而反射波的磁感应强度与相应的电场分量符号相反. 所以, 边界条件可以写为

$$\begin{aligned} &\left[\left(\Delta F^{(\text{inc})}(t, x) + \Delta F_m^{(\text{out})}(t, x) \right) \right. \\ &\quad \left. + v/c \left(\Delta F^{(\text{inc})}(t, x) - \Delta F_m^{(\text{out})}(t, x) \right) \right] \Big|_{x=x^{(m)}(t)} \\ &= 0, \\ &\left[\left(\Delta F^{(\text{inc})}(t, x) - \Delta F_m^{(\text{out})}(t, x) \right) \right. \\ &\quad \left. + v/c \left(\Delta F^{(\text{inc})}(t, x) + \Delta F_m^{(\text{out})}(t, x) \right) \right] \Big|_{x=x^{(m)}(t)} \\ &= \frac{4\pi}{c} K_y. \quad (10) \end{aligned}$$

我们注意到, $\Delta F^{(\text{inc})}(t, x)$ 和 $\Delta F_m^{(\text{out})}(t, x)$ 都具有一个指数因子和一个谱分布函数相乘的形式, 并且其随时间的演化被包含在相应的指数因子之中. 我们求解上述边条件时首先要求 $\Delta F^{(\text{inc})}(t, x)$

和 $\Delta F_m^{(out)}(t, x)$ 具有相同的随时间的演化规律, 并考虑到运动边界 $x^{(m)}(t)$ 的形式 (1) 式, 容易求得

$$\omega' = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \omega. \quad (11)$$

如再进一步要求, 入射波和反射波振幅在边界上的相因子相等, 就容易解得

$$t'_0 + \frac{1}{c} x'_0 = t_0 + \frac{x_0^{(m)}}{c} + \frac{1 - v/c}{1 + v/c} \left(\frac{x_0^{(m)} - x_0}{c} + \tau \right). \quad (12)$$

这样消去指数因子后, 边条件 (10) 式就还原成为一个谱分布函数 $G_m^{(out)}(\omega')$ 的方程, 不难求得

$$\Delta \omega' G_m^{(out)}(\omega') = -\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \Delta \omega G^{(inc)}(\omega). \quad (13)$$

总结起来, 我们求得

$$\begin{aligned} & \Delta F_m^{(out)}(t, x) \\ &= -\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \Delta \omega' \exp \left\{ -i\omega' \left\{ t - t_0 + \frac{1}{c} [(x - x_0) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{2}{1 + v/c} (x_0^{(m)} - x_0)] - \frac{1 - v/c}{1 + v/c} \tau \right\} \right\} \\ & \quad \times \left[\frac{\Delta \omega}{\Delta \omega'} \right] G^{(inc)}(\omega) + c.c.. \end{aligned} \quad (14)$$

如果我们进一步对入射波包的不同频率分量求和, 我们就可以得到在运动镜面上反射出来的出射波包的表达式

$$\begin{aligned} & F_m^{(out)}(t, x) \\ &= -\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \int d\omega_1 \exp \left\{ -i\omega'_1 \left\{ t - t_0 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{c} [(x - x_0) - \frac{2}{1 + v/c} (x_0^{(m)} - x_0)] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1 - v/c}{1 + v/c} \tau \right\} \right\} G^{(inc)}(\omega_1) + c.c., \end{aligned} \quad (15)$$

其中, ω'_1 和 ω_1 的关系由 (11) 式给出. 我们注意到这样的事实, 频率为 ω 的入射波在以速度 v 做相向运动的镜面上反射, 所得到的反射波有一个频率移动, 即反射波的频率 $\omega' = \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \omega$ ((11) 式), 这是运动镜面反射所导致的多普勒效应, 我们用边值问题的方式对它进行推导, 而相应的谱分布函数却不受这个多普勒频率移动的影响.

如果我们在运动镜面轨迹方程 (1) 中用 $x_0^{(f)}$ 取代 $x_0^{(m)}$, 并令 $v = 0$, 我们就可以得到在 $x = x_0^{(f)}$ 的固定镜面上反射波包的解,

$$\Delta F_f^{(out)}(t, x)$$

$$\begin{aligned} &= -\Delta \omega e^{-i\omega \{ t - t_0 + \frac{1}{c} [(x - x_0) - 2(x_0^{(f)} - x_0)] - \tau \}} \\ & \quad \times G^{(inc)}(\omega) + c.c., \end{aligned} \quad (16)$$

以及

$$\begin{aligned} & F_f^{(out)}(t, x) \\ &= -\int d\omega_2 e^{-i\omega_2 \{ t - t_0 + \frac{1}{c} [(x - x_0) - 2(x_0^{(f)} - x_0)] - \tau \}} \\ & \quad \times G^{(inc)}(\omega_2) + c.c.. \end{aligned} \quad (17)$$

对于在固定镜面上反射的波包, 反射波中的频率与相应入射波的频率相同, 没有频率移动效应.

在 (15), (17) 式中, 把两个波包振幅的积分重量分别记为 ω_1 和 ω_2 只是想强调一下它们是既保持相干性又独立传播的两个波包, 这样标记显然不会影响所有的物理结果.

我们还想到这样一个有趣的现象, 当入射波包的发射相对于参考时刻 t_0 来说有一个推迟 τ 时, 它在入射波包的频率分量中会贡献一个 $e^{-i\omega\tau}$ 的因子. 在固定镜面上反射的波包把这个相位因子继承了下来, 显然不应有频率的变化. 而在运动镜面上反射的波包分量尽管频率有一个多普勒移动, 但这个从入射波继承下来的描写推迟发射的相位因子却也保持了入射波原来的频率, $e^{-i\omega' \frac{1-v/c}{1+v/c} \tau} = e^{-i\omega\tau}$.

在讨论波包的干涉现象时, 我们常引进电磁波信号所经历的光程概念. 如果一个电磁波信号在 x_0 点、 $t_0 + \tau$ 时刻产生, 这个信号在 \bar{t} 时刻到达位于 \bar{x} 的运动镜面, 按照运动镜面的轨迹方程 (1), 我们容易解得

$$\begin{aligned} \bar{x} - x_0 &= \frac{x_0^{(m)} - x_0 - v\tau}{1 + v/c}, \\ \bar{t} - t_0 &= \frac{\frac{x_0^{(m)} - x_0}{c} + \tau}{1 + v/c}. \end{aligned} \quad (18)$$

显然, 如 (18) 式所显示的那样, 信号传播的光程还依赖于发射时间的推迟. 现在我们可以这样认为, 在 $(t_0 + \tau, x_0)$ 所产生的电磁波信号以光速 c 传播, 经历了光程 $\bar{x} - x_0$ 后到达了反射镜, 从反射镜又再经历了光程 $x - \bar{x}$ 到达了观察点 x . 我们的问题是, 从运动界面边值问题求解得到的 $\Delta F_m^{(out)}(t, x)$ ((14) 式) 能否用 (18) 式所给出的光程来表示? 它的回答是肯定的. 事实上, 确定频率的波包振幅分量 $\Delta F_m^{(out)}(t, x)$ 可以用光程表示为

$$\begin{aligned} & \Delta F_m^{(out)}(t, x) \\ &= -\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \Delta \omega' e^{-i\omega' [t - (t_0 + \tau)]} e^{-i\frac{\omega'}{c} (x - \bar{x})} \end{aligned}$$

$$\times e^{i\frac{\omega'}{c}(\bar{x}-x_0)} \left[\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'} \right] G^{(\text{inc})}(\omega) + \text{c.c.} \quad (19)$$

在电磁信号传播过程中, 光程与频率乘在一起将贡献一个描述波动传播的相位因子. 上面表达式中的第二个相位因子描述了电磁信号从反射镜 \bar{x} 到观察点 x 的传播, 在第一个相位因子中 τ 反映了电磁信号发射相对于 t_0 的推迟, 而第三个相位因子反映了电磁信号从发射到反射镜的传播. 因为反射前后电磁信号传播的频率是不一样的, 分别为 ω 和 ω' , 但是按照 (19) 式, 在出射波的相位中, 发生在反射前的信息无论是光程 $\bar{x} - x_0$ 或发射推迟信息 τ 都不再有反射前的频率 ω , 而是由反射后的 ω' 所记载.

4 电磁波包的干涉

4.1 单色入射波所诱导的干涉效应

一个脉冲波波包, 如上面所描写的, 是许多单色频率分量的叠加. 为了搞清楚波包的干涉及其相应的积分强度, 我们先讨论入射波包的一个任意选定的频率分量分别在静止和运动镜面上反射后所形成的干涉.

一个振幅为 $\Delta\omega G^{(\text{inc})}(\omega)$ 的单色频率分量的入射波, 可以用 (8) 式来描述, 并且我们已经解得它分别在运动镜面和静止镜面反射波的表达式 $\Delta F_m^{(\text{out})}(t, x)$ ((14) 式) 和 $\Delta F_f^{(\text{out})}(t, x)$ ((16) 式). 这两束反射波会合后形成一个它们的相干叠加态, $\Delta F_f^{(\text{out})}(t, x) + \Delta F_m^{(\text{out})}(t, x)$. 如果我们进一步假设它们的分布函数 $G^{(\text{inc})}(\omega)$ 是实函数, 那么设在空间位置 $x_0 - L$ 的探测器接收到的能流密度为

$$\begin{aligned} \Delta P_L(t) &= \Delta P(t, x)|_{x=x_0-L} \propto \left| \Delta F_f^{(\text{out})}(t, x) \right. \\ &\quad \left. + \Delta F_m^{(\text{out})}(t, x) \right|_{x=x_0-L}^2 \\ &= \frac{1+v/c}{1-v/c} \cos \left\{ (\omega' - \omega)(t - t_0 - \frac{L}{c}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{c} \left[\omega' \frac{x_0^{(m)} - x_0}{1+v/c} - \omega(x_0^{(f)} - x_0) \right] \right\} \\ &\quad \times \left[\Delta\omega G^{(\text{inc})}(\omega) \right]^2 + \text{背景项}. \quad (20) \end{aligned}$$

在上式中, 背景项包含了常数项和三个分别按频率 ω' , ω 和 $\omega' + \omega$ 做时间演化的高频振荡项. 我们假设 ω 和 ω' 的量级都在 10^{10} Hz 附近, $\frac{v}{c}$ 的量级约为 10^{-6} , 也就是说, $\omega' - \omega \sim \frac{2v}{c}\omega \sim 10^4$ Hz 应是一种低频振荡. 实验上利用滤波技术完全可以将干涉

项中的高频振荡部分和低频振荡部分区分开来. 所以我们将常数项和高频振荡项合并为背景项, 而把注意力集中在物理上最为重要的低频振荡项, 这一项描述了运动镜面和静止镜面反射波的干涉效应.

我们首先设想运动镜面也是静止的时候, 即 $v = 0$ 这一特殊情形. 按照 (11) 式, 此时 $\omega' = \omega$,

$$\begin{aligned} \Delta P_L(t) &\propto \cos \left[2\omega \frac{x_0^{(m)} - x_0^{(f)}}{c} \right] \left[\Delta\omega G^{(\text{inc})}(\omega) \right]^2 \\ &\quad + \text{背景项}. \quad (21) \end{aligned}$$

这时, 扣除背景效应的能流密度不再与时间有关, 只依赖于两个反射镜面臂长之差的两倍, 即 $2(x_0^{(m)} - x_0^{(f)})$. 这也就是通常 Michelson 干涉仪所演示的干涉现象.

当运动镜面速度 $v \neq 0$ 时, 能流密度不再是常数, 它不仅按多普勒频率 $\omega_D \equiv \omega' - \omega \sim \frac{2v}{c}\omega$ 随时间振荡, 而且也按 ω_D 随探测器的空间位置 L 做周期振荡. 这是由于两个反射镜中有一个在做匀速运动而带来的干涉效应的新特点. 这也就是单色入射波条件下, 在损失能流密度上所显示的多普勒频拍.

我们还愿意指出, 在 $\Delta F_f^{(\text{out})}(t, x)$ 中描述迟后效应的与 τ 相关的相因子为 $e^{i\omega\tau}$, 而在 $\Delta F_m^{(\text{out})}(t, x)$ 中描述迟后效应相应的相因子为 $e^{i\omega' \frac{1-v/c}{1+v/c} \tau}$, 但在它们干涉后的能流密度表达式中这两项却被消去, 也就是说所接收到的能流密度中看不到迟后效应的贡献.

4.2 脉冲波的干涉和积分强度

我们现在进一步来考虑由一个电磁波包入射所引起的干涉效应及其观测. 如前面所提到的, 一个电磁波包经过分裂器后分成了两个相同的各自独立传播的相干脉冲 $F^{(\text{inc})}(t, x)$. 它们分别被一个固定镜面和一个运动镜面所反射.

两个反射波包 $F_m^{(\text{out})}(t, x)$ 和 $F_f^{(\text{out})}(t, x)$ 在探测器处汇合在一起, 形成一个相干叠加的振幅, 在位于 $x_0 - L$ 的探测器处的能流密度为

$$\begin{aligned} P_L(t) &= P(t, x)|_{x=x_0-L} \\ &\propto \left| F_f^{(\text{out})}(t, x_0 - L) \right. \\ &\quad \left. + F_m^{(\text{out})}(t, x_0 - L) \right|^2. \quad (22) \end{aligned}$$

鉴于 $P_L(t)$ 是随时间剧烈振荡的函数, 用探测器来记录能流密度的积分强度 $I_L(n)$ 常常是更为方便的,

$$I_L(n) = \int dt P_L(t)$$

$$=2 \int dt F_f^{(\text{out})*}(t, x_0 - L) F_m^{(\text{out})}(t, x_0 - L) + \text{背景项}. \quad (23)$$

将 (15) 和 (17) 式代入上式, 容易发现背景项 $\int dt [|F_f^{(\text{out})}(t, x_0 - L)|^2 + |F_m^{(\text{out})}(t, x_0 - L)|^2]$ 只是与光程无关的积分常数, 再考虑到

$$\int dt e^{-i(\omega'_1 - \omega_2)t} = 2\pi\delta(\omega'_1 - \omega_2), \quad (24)$$

我们就可以得到波包干涉的积分强度表达式

$$I_L(n) \approx 4\pi \int d\omega \exp \left\{ -i\frac{\omega}{c} \left[2(x_0^{(f)} - x_0) - \frac{2(x_0^{(m)} - x_0)}{1+v/c} + \frac{2v/c}{1+v/c} c\tau \right] \right\} \times \left[G^{(\text{inc})} \left(\frac{1-v/c}{1+v/c} \omega \right) + G^{(\text{inc})*} \left(-\frac{1-v/c}{1+v/c} \omega \right) \right] \times \left[G^{(\text{inc})*}(\omega) + G^{(\text{inc})}(-\omega) \right]. \quad (25)$$

这个波包干涉的积分强度表达式 (25), 与 4.1 节所讨论的单色频率分量入射产生干涉的能流密度表达式 (20) 相比较, 它们之间一个明显的不同是: 波包干涉的积分强度不再与探测器的空间位置 L 有关, 反而依赖于描写波包发射迟后效应的参数 τ . 这个事实可以这样来理解:

首先, 我们在入射波包振幅中选择一个频率为 ω 的频率分量. 与 4.1 节所讨论的单色平面波入射的情形一样, 它被分裂后分别在静止镜面和运动镜面上反射形成两个频率不同的反射波. 在静止镜面上反射的出射波的频率保持不变, 仍然是 ω , 而在运动镜面上反射的出射波的频率 ω' 由于得到了一个多普勒位移而不再等于入射波的频率 ω . 所以由入射波包中一个单色频率分量所诱导的两个出射波在探测器处相干叠加后, 对能流密度的贡献是随时间做周期振荡的 (见 (20) 式), 不能对积分强度有贡献. 出现在这种随时间振荡的能流密度表达式中, 与探测器所在位置相关的多普勒振荡项也就不再会对积分强度有贡献.

其次, 入射波包作为一个整体经过分裂器后分解成两个独立传播的波包, 并分别被静止镜面和运动镜面所反射, 每一个波包都是不同频率振幅的叠加, 分别记为 $\int d\omega_2$ 和 $\int d\omega_1$ (见 (15) 和 (17) 式). 经过运动镜面反射得到多普勒位移后频率为 ω'_1 的反射振幅, 按照波动的叠加性原理, 可以从在静止镜面上反射的没有获得频率移动的叠加振幅中找

到频率与之相等的频率分量, 即找到 $\omega_2 = \omega'_1$ 的频率分量与之相叠加 (事实上 (25) 式就反映了这样的过程). 这对振幅叠加后, 对能流密度的贡献就不再随时间振荡, 从而将对积分强度做出贡献. 一方面, 按照 (15) 和 (17) 式, 探测器空间位置 “ L ” 对于 $F_f^{(\text{out})}(t, x_0 - L)$ 和 $F_m^{(\text{out})}(t, x_0 - L)$ 的贡献分别为 $e^{i\omega_2 \frac{L}{c}}$ 和 $e^{i\omega'_1 \frac{L}{c}}$. 对于这一对选择了 $\omega_2 = \omega'_1$ 的频率分量, 相干叠加后与 L 有关的相位因子将被抵消, 它们对积分强度相应的贡献也就不再依赖于探测器的空间位置 L . 另一方面, 频率 ω'_1 所对应的入射频率为 ω_1 , 迟后效应对这一个频率分量所贡献的相因子为 $e^{i\omega_1 \tau}$. 而频率 ω_2 在反射前后保持不变, 迟后效应对这一个频率分量所贡献的相因子为 $e^{i\omega_2 \tau}$. 现在, 有 $\omega'_1 = \omega_2$, 所以迟后效应对这一对频率的相干振幅所贡献的相因子

$$e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\tau} = e^{-i\omega \frac{2v/c}{1+v/c} \tau},$$

将不再被抵消, 从而对积分强度做出贡献. 我们理解, 这是由具有频谱分布的波包入射所诱导的干涉现象, 和由单色平面波入射所诱导的相应的干涉现象的一个重要的不同点, 而这个不同点又是与多普勒效应相联系的.

积分强度对 τ 的依赖关系也是十分有趣的, 它是在波包干涉的意义下多普勒效应的体现. 我们可以把 τ 看作是在波包层次上的一个 “时间” 变量, 而与之相对应的振动 “频率” 是 $\omega_D \equiv \omega' - \omega \sim 2\frac{v}{c}\omega$ 即多普勒位移的频率不再是原来的 ω .

4.3 简单应用: 运动镜面速度的测量和共轭函数

测量积分强度的一个可能的应用, 是测定运动镜面的速度 v . 如果我们在实验上已知这两束相干光所经历的路程 $x_0^{(f)}$ 和 $x_0^{(m)}$, 那么通过测量到的积分强度数值, 按照 (25) 式就可反过来推演镜面的运动速度. 但在很多情况下, 我们对 $x_0^{(f)}$ 和 $x_0^{(m)}$ 的确切取值的了解是不完备的, 甚至是不知道的, 但我们可以从 (25) 式中可以看到 $v\tau$ 也起着一种有效光程差的作用, 所以我们将试图利用积分强度对 τ 的依赖关系来测定运动镜面的运动速度.

我们是这样从实验上来实现积分强度和 τ 的函数关系的. 首先, 我们产生一系列等间距的相同的波包, 相邻波包间的时间间距为 T , 所以第 n 个脉冲波相应的延迟时间 τ_n 就应是 nT , 即

$$\tau_n = nT, \quad (26)$$

我们把第 n 个脉冲所贡献的积分强度记为 $I(n)$. 对每一个波包的积分强度进行测量, 就得到一个数列 $\{I(n)\}$, $n = 1, 2, \dots$. 我们对这一数列引入它的共轭函数

$$\tilde{I}(\phi) = \sum_n e^{in\phi} I(n). \quad (27)$$

我们注意到 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ 中的求和号所遍历的 n 都取整数值, 所以 $\tilde{I}(\phi)$ 必须是 ϕ 的周期函数, 周期为 2π , 即 $\tilde{I}(\phi + 2\pi) = \tilde{I}(\phi)$. 此外, 由于积分强度 $I(n)$ 是 n 的实函数, 我们有 $\tilde{I}^*(\phi) = \tilde{I}(-\phi)$, 所以 $|\tilde{I}(\phi)|$ 即是 ϕ 的周期函数, 其周期为 2π , 也是 ϕ 的偶函数. (27) 式还告诉我们, (ϕ, n) 是一对共轭变量, $\tilde{I}(\phi)$ 和积分强度 $I(n)$ 各自的分布宽度互为倒数. 积分强度 $I(n)$ 作为 n 的分布越宽, $\tilde{I}(\phi)$ 的分布就越窄.

按照 (26) 和 (27) 式并利用

$$\sum_n e^{in\phi} e^{-in\tilde{\omega}} = 2\pi\delta(\phi - \tilde{\omega}) \Big|_{\text{mod } 2\pi}, \quad (28)$$

其中 $\tilde{\omega} = \frac{2\omega}{c} \frac{Tv}{1+v/c}$, $\text{mod } 2\pi$ 的意思是, 对 ϕ 的任意函数

$$\mathcal{F}(\phi) \Big|_{\text{mod } 2\pi} \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\phi + 2j\pi) \Big|_{-\pi \leq \phi < \pi}.$$

共轭函数 (27) 式可表示为

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\phi) = & 8\pi^2 \exp \left\{ -i \frac{\phi(1+v/c)}{Tv} \left[(x_0^{(f)} - x_0) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{x_0^{(m)} - x_0}{1+v/c} \right] \right\} \left[G^{(\text{inc})} \left(\frac{(1-v/c)\phi}{2Tv/c} \right) \right. \\ & \left. + G^{(\text{inc})*} \left(-\frac{(1-v/c)\phi}{2Tv/c} \right) \right] \\ & \times \left[G^{(\text{inc})*} \left(\frac{(1+v/c)\phi}{2Tv/c} \right) \right. \\ & \left. + G^{(\text{inc})} \left(-\frac{(1+v/c)\phi}{2Tv/c} \right) \right] \Big|_{\text{mod } 2\pi}. \quad (29) \end{aligned}$$

上式中, 我们见到与光程相关的物理量, 如 $x_0^{(f)}$ 和 $x_0^{(m)}$, 只出现在 $\tilde{I}(\phi)$ 的一个相位因子中, 如果不同的 $G^{(\text{inc})} \left(\pm \frac{(1 \pm v/c)\phi}{2Tv/c} (\phi + 2j\pi) \right)$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 之间的重叠可以忽略不计, 那么 $|\tilde{I}(\phi)|$ 就可以表示为 (29) 式右方各被求和项的绝对值之和. 在进一步忽略了 $\frac{v}{c}$ 的高阶项后, 我们有

$$|\tilde{I}(\phi)| = 8\pi^2 \left| G^{(\text{inc})} \left(\frac{\phi}{2Tv/c} \right) \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. + G^{(\text{inc})*} \left(-\frac{\phi}{2Tv/c} \right) \right|_{\text{mod } 2\pi}^2 \\ & \times \left[1 + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

那么与光程有关的物理量就不再出现. 在下面的讨论中, 我们常假设波包的频谱分布满足这一条件.

由于入射波包相干振幅的频率分布函数 $G^{(\text{inc})}(\omega)$ 是已知的, 相应的 $|G^{(\text{inc})}(\omega) + G^{(\text{inc})*}(-\omega)|^2$ 在频率空间的分布也是已知的. 而 $|\tilde{I}(\phi)|$ 对重量 $\frac{\phi}{T}$ 的分布实际上是与 $|G^{(\text{inc})}(\omega) + G^{(\text{inc})*}(-\omega)|^2$ 的分布, 在忽略 $\frac{v}{c}$ 的高阶项的条件下, 只差一个重量的标度变换, 标度变换的因子是 $\frac{2v}{c}$, 所以由 $|\tilde{I}(\phi)|$ 的计算结果就可以确定这个标度因子, 也就是测定了运动镜面的速度.

这是一个基于运动和静止镜面反射波包干涉的原理来确定运动镜面速度的方案, 其中的因子 $\frac{2v}{c}$ 也常被称为多普勒频拍. 按照 (32) 式, 我们不需要知道两束反射光线所经历的光程, 原则上也不需要考查积分强度 $I(n)$ 随 n 分布的特性, 而只需要把 $I(n)$ 的数列表程式化地输入一个 FFT 程序 (快速傅立叶变换程序) 中, 就可以从输出的 $\tilde{I}(\phi)$ 的数据中, 通过对 $\tilde{I}(\phi)$ 函数形式的认定而直接求得运动镜面的运动速度. 我们着重指出, (30) 式是一个只依赖于入射波包频率分布函数的共轭函数的解析表达式, 我们完全可以不必通过积分强度作为中间变数来求得运动镜面的速度, 而是可以直接从入射波包频谱分布的初始信息通过 $|\tilde{I}(\phi)|$ 的解析表达式而求得运动镜面速度.

5 数值计算举例和讨论

为了给讨论提供一个更为清楚的物理图像, 我们在下面先以高斯波包为例. 按照 (5) 式, 我们可以对 (15), (17) 式做 ω 的积分, 在探测器接收到的自运动镜面和静止镜面反射的出射波包振幅现具有下列形式:

$$\begin{aligned} & F_f^{(\text{out})}(t; x_0 - L) \\ & = -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} A e^{-i\omega_0(t-t_f)} e^{-\frac{1}{4\alpha}(t-t_f)^2} + \text{c.c.}, \quad (31) \end{aligned}$$

其中 $t_f = t_0 + \frac{2(x_0^{(f)} - x_0) + L}{c} + nT$

$$\begin{aligned} & F_m^{(\text{out})}(t; x_0 - L) \\ & = -\frac{1+v/c}{1-v/c} A \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-i\omega_0 \frac{1+v/c}{1-v/c} (t-t_m)} \end{aligned}$$

$$\times e^{-\frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)^2(t-t_m)^2} + \text{c.c.}, \quad (32)$$

其中

$$t_m = t_0 + \frac{2}{1+v/c} \frac{(x_0^{(m)} - x_0)}{c} + \frac{L}{c} + \frac{1-v/c}{1+v/c} nT.$$

很明显, 这两个高斯型波包到达探测器的时间是有先后的, 这种时间的差别主要是由观察点到静止镜面的距离 $x_0^{(f)}$ 和到运动镜面的距离 $x_0^{(m)}$ 的差别所决定的, 它体现在 t_f 和 t_m 的不同. 一个有趣的问题是, 如果 $x_0^{(f)}$ 和 $x_0^{(m)}$ 的差别大大超过了波包的宽度 $c\sqrt{\alpha}$, 那么这两个不同的波包如何形成有效的干涉, 特别是, 在很多情况下我们对 $x_0^{(f)}$ 和 $x_0^{(m)}$ 的知识是不完备的, 我们又如何实现上一节中所描述的, 基于两个波包相互干涉的原理, 对运动镜面速度进行测量.

为了回答这一问题, 我们将对高斯波包条件下积分强度做进一步的分析. 将 (31), (32) 式代入 (23) 式, 我们就有

$$I(n) \approx 4\pi A^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \left[\frac{1-v/c}{1+v/c}\right]^2 \alpha}} e^{-2\alpha\omega_0^2 \frac{v^2}{1+\frac{v^2}{c^2}}} \times e^{i\omega_0 \frac{1+v/c}{1+\frac{v^2}{c^2}}(t_f-t_m)} e^{-\frac{(1+v/c)^2(t_f-t_m)^2}{8(1+\frac{v^2}{c^2})\alpha}} + \text{c.c.}, \quad (33)$$

$$t_f - t_m = \frac{1}{c} \left[2 \left(x_0^{(f)} - x_0 \right) - \frac{2}{1+v/c} \left(x_0^{(m)} - x_0 \right) + \frac{2vnT}{1+v/c} \right], \quad (34)$$

其中, 我们略去了与光程无关的背景项, 并作了载波频率远大于波包频谱宽度的假设. 在上式中对于确定的 n , 如果 $x_0^{(f)}$ 和 $x_0^{(m)}$ 的差别很大, t_f 和 t_m 的差别也会是一个大数, 所测到的积分强度将按指数函数的方式趋于零. 但如果在实验上能够提供数目很大而且足够大的一组脉冲序列, 那么按照 (33), (34) 式, 即使我们对 $x_0^{(f)}$ 和 $x_0^{(m)}$ 的知识不完备, 我们总能找到这样的 n 的区域使得 $t_f - t_m \sim 0$, 即在那样 n 的区域上形成最有效的干涉, 而积分强度的共轭函数也主要是由这个区域上的积分强度所贡献.

显然, 积分强度 $I(n)$ 的极大值出现在自固定镜面反射的波包和自运动镜面反射的波包峰值相重合的时候, 也就是说当 $t_f = t_m$ 时, $I(n)$ 取极大值.

求解 $t_f - t_m = 0$, 我们得到,

$$n = -\bar{n}_0 = -\frac{1}{vT} \left[(1+v/c)(x_0^{(f)} - x_0) - (x_0^{(m)} - x_0) \right], \quad (35)$$

其中 \bar{n}_0 是一个无量纲参数, 它描述了两个相干波包间的光程差. 这样 (33) 式可以改写为

$$I(n) \approx 4\pi A^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \left[\frac{1-v/c}{1+v/c}\right]^2 \alpha}} e^{-2\alpha\omega_0^2 \frac{v^2}{1+\frac{v^2}{c^2}}} \times e^{i\frac{1}{\Delta^{(1)}}(n+\bar{n}_0)} e^{-\frac{1}{\Delta^{(2)2}}(n+\bar{n}_0)^2} + \text{c.c.}, \quad (36)$$

其中

$$\Delta^{(1)} = \frac{1+v^2/c^2}{2\omega_0 v/cT} = \frac{1}{2\omega_0 v/cT} \left(1 + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right), \quad \Delta^{(2)} = \frac{\sqrt{2(1+v^2/c^2)\alpha}}{v/cT} = \frac{\sqrt{2\alpha}}{v/cT} \left(1 + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right). \quad (37)$$

积分强度 $I(n)$ 的宽度 $\Delta^{(2)}$ 有这样的物理意义, 对于延迟时间间隔为 T 的两个相邻的入射波包, 在时间间隔 T 内, 运动镜面运动了 vT 的距离, 而固定镜面却没有移动, 所以相应的反射波包增加了 vT 的相对光程差. 当 n 分别从增加和减小两个方向偏离 $-\bar{n}_0$ 时, $F_f^{(\text{out})}(t; x_0 - L)$ 和 $F_m^{(\text{out})}(t; x_0 - L)$ 峰值间的距离 $t_f - t_m$ 也随 n 而增加. 当 $n \rightarrow n+1$ (或 $n \rightarrow n-1$) 相应峰值间的距离就增加 vT : $\Delta(t_f - t_m) = v/cT$. 这时, 分别从固定镜面和运动镜面反射回来的波包的重叠也在减少, 积分强度 $I(n)$ 的取值也随之而逐渐减小. 如果我们认为当 $F_f^{(\text{out})}(t; x_0 - L)$ 和 $F_m^{(\text{out})}(t; x_0 - L)$ 峰值间的距离超过了它们各自的宽度 (均为) $\sqrt{\alpha}$, 它们对积分强度 $I(n)$ 的贡献就可以忽略的话, 那么 $I(n)$ 的分布宽度 $\Delta^{(2)}$ 就应该是在 $\sqrt{\alpha}$ 中有多少个 $\frac{v}{c}T$, 即多少个有非零交叠的 n 的取值. 这就是 (37) 式的物理意义.

我们现在通过一个例子来演示上面所提议的方案. 假设波包的载波频率 $\omega_0 \sim 6.28 \times 10^{10}$ Hz, 脉冲序列中的每一个脉冲的宽度 $\sqrt{\alpha} \sim 3 \times 10^{-9}$ s, 相邻脉冲的时间间隔 $T = 10^{-4}$ s. 运动镜面初始时刻的位置和静止镜面的位置分别为 $x_0^{(m)} \sim 9 \times 10^2$ m, $x_0^{(f)} \sim 10^3$ m. 我们还假设待测定的运动镜面速度 $v = 50$ m/s. 通过数值计算积分强度 $I(n)$ 作为 n 的函数果然在 $n = -2.0 \times 10^4$ 处有一个很好的非零分布, 如图 2 所示. 它实际上是一个周期为 $\Delta^{(1)} \sim 0.48$ 的密集振荡函数, 这个函数有一个半宽度为 $\Delta^{(2)} \sim 2.55 \times 10^2$ 的高斯型包络线. 由于

振荡过于密集, 即 $\Delta^{(1)} \ll \Delta^{(2)}$, 它的包络轮廓格外分明.

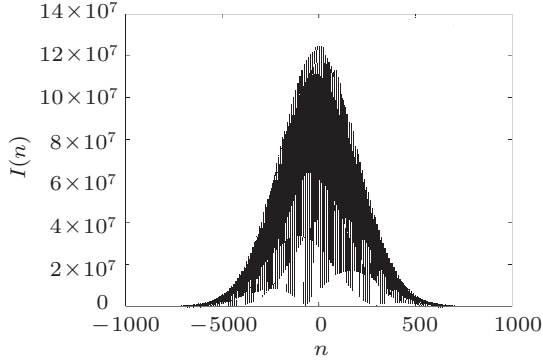


图2 积分强度 $I(n)$ 作为波包序列数: n 的函数图例 (假设入射波包成一个等间距的序列, 对其中每一个波包所产生的干涉做积分强度的测量, 这些测到的积分强度形成一组数列 $\{I(n)\}$, $n = 0, 1, \dots$. 假设入射波包是高斯型的, 它的频谱分布函数由 (5) 式给出, 所用参数: 波包的载波频率 $\omega_0 \sim 6.28 \times 10^{10}$ Hz, 脉冲序列中的每一个脉冲的宽度 $\sqrt{\alpha} \sim 3 \times 10^{-9}$ s, 相邻脉冲的时间间隔 $T = 10^{-4}$ s. 运动镜面初始时刻的位置和静止镜面的位置分别为 $x_0^{(m)} \sim 9 \times 10^2$ m, $x_0^{(f)} \sim 10^3$ m. 我们还假设待测定的运动镜面速度 $v = 50$ m/s. 通过数值计算积分强度 $I(n)$ 作为 n 的函数果然在 $n = -2.0 \times 10^4$ 处有一个很好的非零分布. 它实际上是一个周期为 $\Delta^{(1)} \sim 0.48$ 的密集振荡函数, 这个函数有一个半宽度为 $\Delta^{(2)} \sim 2.55 \times 10^2$ 的高斯型包络线)

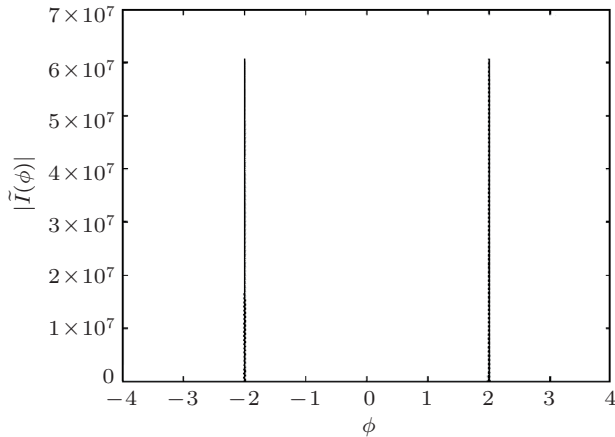


图3 积分强度的共轭函数图例 (在与图2完全相同的参数条件下, 我们计算了积分强度曲线的共轭变换函数. 为了方便纵坐标只记录了共轭函数模的数值 $|\tilde{I}(\phi)|$. 对于共轭函数 $\tilde{I}(\phi)$ 的数值计算, 我们分别从两个公式进行各自独立的计算. 一方面我们将从数值计算得到的积分强度 $I(n)$ 的数据作为输入, 按照 (29) 式通过快速傅里叶变换从而求得 $|\tilde{I}(\phi)|$ 的曲线. 另一方面我们又按照共轭函数 $\tilde{I}(\phi)$ 的解析式 (40) 直接从数值上读出 $|\tilde{I}(\phi)|$ 的函数形式. 前者的计算是在适当选定的 n 的有限区间上进行的. 而后者原则上是在 n 的无穷区间上解析处理的. 两种方法所得 $|\tilde{I}(\phi)|$ 曲线在误差范围内完全一致. 所以在图形中我们只显示了一条曲线. 图中显示在 $\phi = \pm\bar{\phi} = \pm 2.1$ 处, $\tilde{I}(\phi)$ 特别是 $|\tilde{I}(\phi)|$ 有两个非常明显而精准的峰值. 在 (39) 式的意义下, $\bar{\phi} = 2.1$ 的取值正落在 $[0, \pi)$ 的区间内)

在高斯波包的条件下, 积分强度 $I(n)$ ((36) 式)

的共轭函数的表达式为

$$\begin{aligned} & \tilde{I}(\phi) \\ &= 8\pi^2 e^{-i\frac{\phi(1+v/c)}{vT}[(x_0^{(f)} - x_0) - \frac{x_0^{(m)} - x_0}{1+v/c}]} \\ & \times \left[e^{-\alpha(\frac{\phi(1-v/c)}{2v/cT} - \omega_0)^2} + e^{-\alpha(-\frac{\phi(1-v/c)}{2v/cT} - \omega_0)^2} \right] \\ & \times \left[e^{-\alpha(\frac{\phi(1+v/c)}{2v/cT} - \omega_0)^2} + e^{-\alpha(-\frac{\phi(1+v/c)}{2v/cT} - \omega_0)^2} \right] \Big|_{\text{mod } 2\pi} \\ & \cong 8\pi^2 e^{-i\phi\bar{n}_0} \left[e^{-\frac{\Delta^{(2)2}}{4}(\phi - \bar{\phi})^2} + e^{-\frac{\Delta^{(2)2}}{4}(\phi + \bar{\phi})^2} \right] \\ & \times \left(1 + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right) \Big|_{\text{mod } 2\pi}, \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta^{(1)}} = 2\omega_0 v / cT \left(1 + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right). \quad (39)$$

从第一个式子到第二个式子, 我们再次略去了类似于 $e^{-\alpha(\omega - \omega_0)^2} e^{-\alpha(\omega + \omega_0)^2}$ 这样的高斯分布的交叠项. 在这种高斯峰间的交叠可忽略的条件下, 按照 (30) 式, 我们还有

$$\begin{aligned} |\tilde{I}(\phi)| &= 8\pi^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{\Delta^{(2)2}}{4}(\phi + 2j\pi - \bar{\phi})^2} \right. \\ & \left. + e^{-\frac{\Delta^{(2)2}}{4}(\phi + 2j\pi + \bar{\phi})^2} \right] \left(1 + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right), \end{aligned} \quad (40)$$

在 (40) 式对整数 “ j ” 的求和中, 每一项有一个它自己的峰值, 其峰值的位置

$$\begin{aligned} \phi_{\max} &= (\pm\bar{\phi} - 2j\pi) \left[1 - o\left(e^{-\frac{\Delta^{(2)2}}{2}\bar{\phi}}\right) \right. \\ & \left. - o\left(e^{-\frac{\Delta^{(2)2}}{2}(\pi - \bar{\phi})}\right) \right] \left[1 + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (41)$$

其中 $\pm\bar{\phi} - 2j\pi$ 是 $\tilde{I}(\phi)$ 峰值位置的零级近似. 它偏离 $\pm\bar{\phi} - 2j\pi$ 的改正量是一个随 $\Delta^{(2)2}\bar{\phi}$ 或 $\Delta^{(2)2}(\pi - \bar{\phi})$ 衰减的指数因子. 前者描述了 $[-\pi, \pi)$ 上两个高斯函数的重叠, 而后者则是 $(0, 2\pi)$ 上相应高斯函数的重叠. 这两个衰减因子与 $\tilde{I}(\phi)$ 两个峰值间的距离 $2\bar{\phi}$ 或 $2\pi - 2\bar{\phi}$ 成正比, 与它的峰宽 $\Delta\phi = \frac{2}{\Delta^{(2)}} \sim \frac{2v/cT}{\sqrt{2\alpha}}$ 成反比. 当峰宽很窄, 两峰之间的距离很大时, 这个修正可以忽略, 见图3.

在目前的参数条件下, 待测速度 v 被假设为 $v \approx 50$ m/s, 那么按照 (43) 式就有 $\bar{\phi} \sim 2.0$, 它恰好落在 ϕ 的区间 $[0, \pi)$ 内, 同时每一个高斯波包的峰值都将落在 $((2j - 1)\pi, 2j\pi)$ 或 $(2j\pi, (2j + 1)\pi)$ 内. 这也就是说, 在给定的参数 (ω_0, T) 条件下, 如果待测速度恰好使得相应的峰值位置 $\bar{\phi}$ 落在 $[0, \pi)$ 内, 那么我们就可以用从实验数据中导得的 $\tilde{I}(\phi)$ 的

峰值位置 $\bar{\phi}_{\max}^{\text{exp}}$, 来取代 (41) 式中的 $\bar{\phi}$ 而求得运动镜面的速度

$$v = \frac{c}{2\omega_0 T} \bar{\phi}_{\max}^{\text{exp}}. \quad (42)$$

如果相应的峰值位置超过了 $[0, \pi)$ 的区间, 即 $\phi_{\max} > \pi$, 这时如何求得运动镜面的速度, 请见附录 B 及所附图 B1 和图 B2.

$\tilde{I}(\phi)$ 峰宽的大小不仅影响着各个高斯峰之间的交叠程度, 它也反映了从实验数据中读出峰值位置的不确定程度, 所以从测定峰值精度的意义下来说, 峰宽 $\Delta\phi$ 越窄测定运动镜面速度的精度就越高.

图 3 给出了共轭函数 $\tilde{I}(\phi)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 区间上函数形式的数值结果. 按照 4.3 节中的讨论, 对于 $|\tilde{I}(\phi)|$ 的函数形式, 我们既可以通过积分强度 $I(n)$ 的数值结果按照 (29) 式来求得, 也可以通过 $|\tilde{I}(\phi)|$ 的解析表达式 (30), 在高斯波包近似下即 (40) 式, 直接进行计算. 前者的计算是在适当选定的 n 的有限区间上进行的. 而后者原则上是在 n 的无穷区间上解析处理的. 计算结果显示, 所得 $|\tilde{I}(\phi)|$ 曲线在误差范围内完全一致. 图 3 中的 $|\tilde{I}(\phi)|$ 曲线显示了在 $\phi = \pm\bar{\phi}$ 处, $\tilde{I}(\phi)$ 特别是 $|\tilde{I}(\phi)|$ 有两个非常明显而精准的峰值. 这也说明在目前的参数条件下, 各种近似能得到精确的满足, 通过对 $\bar{\phi}$ 的拟合很容易把运动镜面的速度确定下来.

如 4.3 节所指出的那样, 这是一个很有意思的确定运动镜面速度的方案. 我们在这一节中, 用高斯波包具体演示了这个方案, 在 (40) 式中有效光程差的相位因子不再出现, 我们就可以通过 $|\tilde{I}(\phi)|$ 的峰值位置来确定 $\bar{\phi}$ 从而直接导得运动镜面的运动速度. 这样看似完美的测量运动镜面速度的方案还有没有原则上的局限性. 首先, 由于我们所导得的共轭函数 $\tilde{I}(\phi)$ 是 ϕ 的偶函数, 因此我们只能从接收到的积分强度的数据中推演出运动镜面速度的绝对值, 而难以判断速度的正负号, 也就是说不能知道运动镜面是在朝向还是背离接收器而运动. 其次, 试设想这样的极端情况, 积分强度 $I(n)$ 的分布非常窄, 以至只在 n 的某一个取值 $n = n_c$ 上不为零, 即 $I(n) \propto \delta_{n, n_c}$, 这时相应的 $|\tilde{I}(\phi)|$ 是一个与 ϕ 无关的常数, 我们就不可能从 $|\tilde{I}(\phi)|$ 的几何性质上读出任何关于镜面速度的信息. 这一讨论给我们这样的启示, 积分强度 $I(n)$ 的分布不能太窄, 即在 n 的相当大的一个取值范围上 $I(n)$ 明显的不为零, 否则会严重影响计算共轭函数 $|\tilde{I}(\phi)|$ 的准确性, 从而影响确定运动镜面速度的准确性. 所以为了获得运

动镜面速度 v 足够的精确性, 按照 (31) 和 (34) 式, 波包在时间域内的宽度必须能够容纳足够大的 n 的取值范围, 在它上面积分强度 $I(n)$ 有有效的非零贡献. 这也就是说, 我们期望积分强度的宽度足够的大, 波包在时间域内的宽度也要相应的足够的大, 而共轭函数的宽度应足够的小, 才能得到测量运动镜面速度足够的精确度.

6 结论

我们讨论了分别在运动和静止镜面上反射的两个相干电磁波包的干涉现象. 作为经典电动力学应用的一个例子, 我们分析和讨论了这种干涉现象的特点, 以及测量这种干涉现象的方案, 特别是由测量结果反推镜面运动速度的方法和原理.

在一个一维模型中, 本文用波动方程的边值问题讨论了波包的传播和在镜面, 特别是运动镜面上的反射, 从而求解了波包干涉的积分强度, 讨论了其相应的物理意义. 在这些讨论中也包含了利用运动界面边条件导出这类干涉现象中的多普勒效应. 对于等间距的入射波包序列, 我们求得了其共轭函数解析表达式, 并以此作为分析、讨论运动镜面速度测量的出发点. 在本文的讨论中, 涉及到波包宽度 $c\sqrt{\alpha}$, 波包序列中相邻波包的间隔 T 以及多普勒频移 $\frac{2v}{c}\omega_0$ 三个时间 (或长度) 量纲, 它们间的相互竞争和相互作用极大的丰富了这种干涉现象的物理内涵. 这也说明, 包含有多普勒效应的干涉现象实际上是一种具有重要应用背景的, 而又是非常基本的物理现象.

此外, 我们在引言中曾提到文献 [2] 对这类干涉现象提出了一个从频率域出发的系统的理论分析. 今后如果能在一些实际应用的应用中, 分别按照文献 [2] 的方案以及本文的思路对同一问题进行并行的分析, 并对它们的异同点进行比较, 那也许将是有益的.

我们也愿意在这指出, 除了文献 [1] 所提到的以外, 还有许多与本文内容紧密相联的重要而有兴趣的问题有待讨论, 如, 如果我们把固定或者运动反射镜推广为镜子的阵列, 这样的系统有可能来模拟多普勒光学相干断层扫描 [4] 的物理机理; 如果运动镜面不再做匀速运动, 而是做匀加速度运动, 对这样系统的波包干涉现象的研究与是否能从实验上直接观察到玻尔兹曼输运方程 [5] 的碰撞项有关; 当波包的强度变得越来越弱时, 量子效应将会变得更为重要 [6], 无论是将本文关于分别在运动和

静止镜面上反射的波包干涉现象的讨论,推广到量子理论甚至是发展一种同时适用于经典和量子情形的统一的多普勒波包干涉理论,都将是饶有兴趣的.我们希望本文的讨论将会引起读者对上述或其他相关问题的关注和兴趣.

作者之一,励名强,感谢中国科学院理论物理研究所所长吴岳良院士对他的邀请和热情款待.

附录 A 运动边界的边值问题

对于一个分割两种介质的运动界面,设界面的左侧为“1”介质,其右侧为介质“2”,界面以速度 \mathbf{v} 运动,连接两种介质场量的边条件为^[3]

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} &= 4\pi\sigma, \\ (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \mathbf{t} \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] &= 0, \\ \mathbf{t} \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)] &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{K} \cdot \mathbf{t}, \end{aligned}$$

其中 \mathbf{n} 是界面的法线矢量,由介质“1”指向介质“2”, \mathbf{t} 为界面内的切向单位矢量. $\mathbf{E}_{1,2}$ 和 $\mathbf{H}_{1,2}$ 分别是界面两侧的电场和磁场强度, $\mathbf{D}_{1,2} = \epsilon_{1,2}\mathbf{E}_{1,2}$ 和 $\mathbf{B}_{1,2} = \mu_{1,2}\mathbf{H}_{1,2}$ 分别是界面两侧的电位移矢量和磁感应强度. $\epsilon_{1,2}$ 和 $\mu_{1,2}$ 分别是介电常数和导磁率系数.

我们建立坐标 x 轴也是由介质“1”指向介质“2”,并与界面垂直.对于圆频率为 $\omega = ck$ 的入射平面波,我们进一步假设它的波矢 k 平行于 x 轴,电场矢量取在 y 方向,这时,上式中的第一和第二个边条件自动满足,余下的第三、第四个边条件成为

$$\begin{aligned} E_y^2 - E_y^1 + v/c(B_z^2 - B_z^1) &= 0, \\ -(H_z^2 - H_z^1) - v/c(D_y^2 - D_y^1) &= \frac{4\pi}{c} K_y. \end{aligned}$$

我们进一步假设,介质“1”是真空,脉冲波在其中传播和反射;介质“2”是理想导体,用它来描述静止和运动的理想镜面.这样,我们有 $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$, 而 $E_y^2 = D_y^2 = B_z^2 = H_z^2 = 0$. 这时边条件退化为

$$\begin{aligned} E_y^1 + v/cB_z^1 &= 0, \\ B_z^1 + v/cE_y^1 &= \frac{4\pi}{c} K_y. \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

附录 B 由共轭函数峰值确定运动镜面速度中一种假象的消除

在这一节中,我们还是以高斯近似公式(5)为例展开讨论.首先,我们对第5节中的相关讨论做一些澄清.

在第5节中所讨论的 $|\tilde{I}(\phi)|$ 两个落在 $(-\pi, \pi)$ 内的峰值是由(40)式求和中 $j = 0$ 项所贡献.也就是说, $j = 0$ 的两个峰值正好落在 $\phi \in (-\pi, \pi)$ 的区间内.我们现在的问

是:如果 $j = 0$ 项的两个峰值的位置 $\pm\bar{\phi}$ 落在了 $(-\pi, \pi)$ 的区间外,那么第5节中所讨论的测定运动镜面速度的方案是否仍然有效.

为简单起见,我们假设现在的 $\bar{\phi}$ 为

$$\pi < \bar{\phi} < 2\pi, \quad -2\pi < -\bar{\phi} < -\pi,$$

并且记这两个由 $j = 0$ 项贡献的峰值位置为

$$\bar{\phi}_{j=0}^{(+)} \equiv \bar{\phi} = \pi + \Delta\bar{\phi},$$

$$\bar{\phi}_{j=0}^{(-)} \equiv -\bar{\phi} = -\pi - \Delta\bar{\phi},$$

其中我们以“+”来标记右边的峰值位置,以“-”标记左边的峰值位置.按假设 $0 < \Delta\bar{\phi} < \pi$. 因为 $|\tilde{I}(\phi)|$ 是一个偶函数,我们只需要讨论 $\phi > 0$ 的情形.

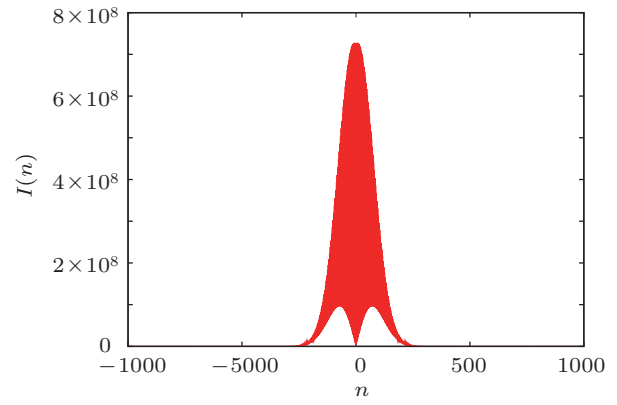


图 B1 积分强度 $I(n)$ 作为波包序列数: n 的函数图例 2(当待测定的运动镜面速度增至 $v = 125$ m/s, 而其他参数保持不变时积分强度 $I(n)$ 随 n 的分布.在目前条件下, $I(n)$ 的峰值位置落在 $n = -8.0 \times 10^3$ 处,它仍然是一个周期为 $\Delta^{(1)} \sim 0.19$ 的密集振荡函数,但这个振荡函数的高斯型包络线的半宽度减小为 $\Delta^{(2)} \sim 1.02 \times 10^2$)

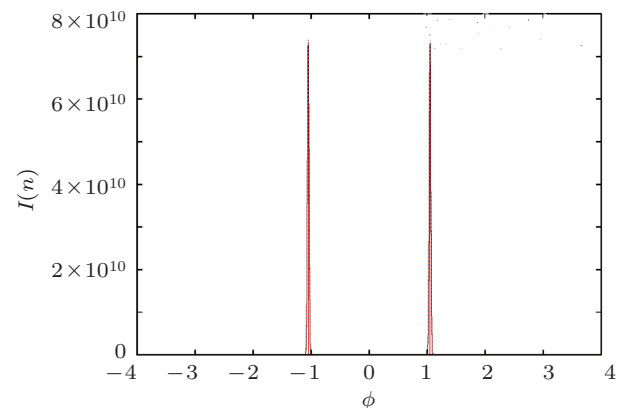


图 B2 积分强度的共轭函数图例 2(在与图 B1 相同的参数条件下,共轭函数 $|\tilde{I}(\phi)|$ 在 $(-\pi, \pi)$ 的区间上仍然出现了两个非常明显而精准的峰值,其峰值位置为 $\pm\bar{\phi}' = \pm 1.05$. 由于所假设的运动镜面的速度 $v = 125$ m/s, 超过了临界速度 $v_u = \frac{c\pi}{2\omega_0 T} 75$ m/s, 所以,如果把 $[0, \pi)$ 区间上出现的峰值位置 $\bar{\phi}'$ 取代(41)式中的 $\bar{\phi}_{\max}^{\text{exp}}$, 不能得到运动镜面的真实速度,得到的只是一个假象.运动镜面真实速度所对应的 $\bar{\phi}_{\max}^{\text{exp}}$ 应该是 $2\pi - \bar{\phi}'$)

与此同时, $|\tilde{I}(\phi)|$ 求和中 $j = -1$ 项所贡献的左边峰值位置为

$$\bar{\phi}_{j=-1}^{(-)} \equiv \bar{\phi}' = \pi - \Delta\bar{\phi}.$$

进入了 $(-\pi, \pi)$ 的区间. 所以我们在由实验数据直接导出的共轭函数 $|\tilde{I}(\phi)|$ 的函数图形上, 在 $(-\pi, \pi)$ 的区间内见到的两个峰值应该是由求和项中 $j = -1$ 项的左峰和 $j = 1$ 项的右峰所贡献, 它们的峰值位置分别为 $\pm\bar{\phi}' = \pm\bar{\phi}_{j=-1}^{(-)}$.

如果我们不小心, 简单的用 $(-\pi, \pi)$ 区间内 $|\tilde{I}(\phi)|$ 两个峰值的位置, 按照 (42) 式来导出运动镜面速度 v 的话, 得到的是一个假的速度, 即

$$v_{\text{false}} = \frac{c}{2\omega_0 T} \bar{\phi}'. \quad (\text{B1})$$

显然这样定出的 v_{false} 是错误的, 正确的运动镜面速度的表达式应是

$$v = \frac{c}{2\omega_0 T} \bar{\phi}. \quad (\text{B2})$$

如果我们按照 (41) 式引进当 $j = 0$ 项的右峰值正好落在 $(-\pi, \pi)$ 的右边界上的端速度 v_u , 即在 (41) 式中令 $\bar{\phi} \rightarrow \pi$,

$$v_u = \frac{c\pi}{2\omega_0 T}. \quad (\text{B3})$$

那么我们就可以求得运动镜面的速度

$$v = 2v_u - v_{\text{false}}. \quad (\text{B4})$$

为了演示上面的结果, 我们选用这样一组参数来进行数值计算, 我们把所假设的运动镜面速度 v 选为 125 m/s, 而保持其他参数不变, 这时按 (B3) 式端速度 $v_u = 75$ m/s. 计算所得积分强度 $I(n)$ 作为 n 的函数如图 B1 所示. 与图 2 相比, 它的特点是由于运动镜面速度的增加使得分布的宽度减小. 相应的 $|\tilde{I}(\phi)|$ 作为 ϕ 的函数, 如图 B2 所示, 在 $(-\pi, \pi)$ 区间内仍然出现两个高斯峰, 其位置是 $\pm\bar{\phi}' = \pm 1.05$. 从数值上可以检验, 将 $\bar{\phi}'$ 代入 (B1) 式可得 $v_{\text{false}} = 25$ m/s, 而运动镜面真实的速度应对应于 $\bar{\phi} = 2\pi - \bar{\phi}'$, 即 (B4) 式所示, $v = 125$ m/s.

如果运动镜面的速度更大, 它使得 $j = 0$ 项右峰值的位置 $\bar{\phi}_{j=0}^{(+)}$ 超过 2π 或更多时, 我们很容易将上面的讨论进行推广, 从 $|\tilde{I}(\phi)|$ 在 $(-\pi, \pi)$ 区间内的峰值位置求出的 v_{false} 并由此求得正确的运动镜面速度 v .

[1] Wehner D R 1995 *High-Resolution Radar*. Boston (MA: Artech House)
Skolnik M L 1980 *Introduction to Radar Systems* (New York: McGraw-Hill)
[2] Ming-Chiang Li 2004 *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **52** 3319
[3] John David Jackson 1975 *Introduction and Survey "Classical Electrodynamics"* (2nd Ed.) (John Wiley and sons Inc.) p13-p22

[4] Fercher A F 1996 *Journal of Biomedical Optics* **1** (2) 157
[5] Wang Z X 1965 *Non-equilibrium Statistical Physics*, "Introduction to Statistical Physics" (Higher Education Press) p41 (in Chinese) [王竹溪 1965 非平衡态的统计理论 "统计物理学导论" (高等教育出版社) 第 41 页]
[6] Wu Q L, Liu Y, Chen W, Han Z F, Wang K Y, Guo G C 2010 *Progress in Physics* **30** 3 (in Chinese) [吴青林, 刘云, 陈巍, 韩正甫, 王克逸, 郭光灿 2010 物理学进展 **30** 3]

A basic theory for the interference of wave packets reflected from stationary and moving boundaries

Yang Lin-Ping¹⁾ Su Zhao-Bing^{2)†} Li Ming-Chiang²⁾

1) (*Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences 100190, China*)

2) (*Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences 100190, China*)

(Received 15 November 2011; revised manuscript received 16 March 2011)

Abstract

In this paper, the interference of wave packets reflected from a stationary boundary and a moving boundary respectively are discussed. The present theory is based on the boundary value problem of classical electrodynamics, especially with the moving boundary which gives rise Doppler effect. Various distinguished interference properties are investigated and a rigorous expression for the velocity measurement of the moving mirror is provided. At the end, the paper points out that many similar and important problems are waiting for us to explore.

Keywords: interference of wave packets with Doppler effect, electromagnetics and radio physics

PACS: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 42.25.Gy, 42.25.Hz

† E-mail: zbs@itp.ac.cn